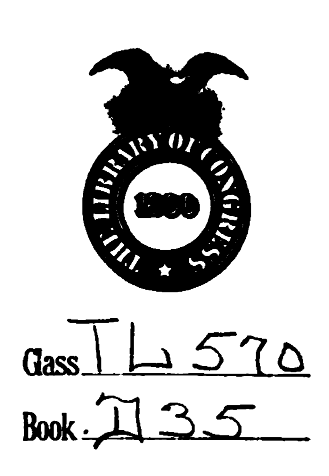
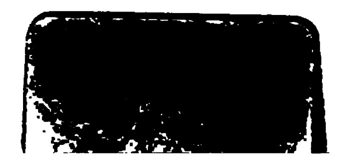

TL
570
.D35


THE LIBRARY OF CONGRESS







NAVIGATION AÉRIENNE

AVIATION

THÉORIE ET PRATIQUE

PAR

A. DELPRAT

Constructeur-Mécanicien

INVENTEUR DU VÉLOCIPÈDE AÉRIEN

Rédacteur au Journal "**La Capitale**"



PARIS

IMPRIMERIE WATTIER & Cie

4, RUE DES DÉCHARGEURS, 4

1892

rement de tous ceux, sans exception, qui, comme moi, s'occupent de résoudre cet important problème.

J'affirme, de la manière la plus absolue, que la question de la navigation aérienne est, avant tout, une question d'habileté mécanique et non point une question de moteur. J'affirme, de la manière la plus absolue, qu'avec sa seule puissance musculaire, l'homme peut naviguer dans les airs avec la facilité et la rapidité de l'hirondelle. J'affirme, de la manière la plus absolue, que, sans qu'il soit nécessaire de découvrir de nouveaux moteurs, il est aisé de construire des navires aériens mécaniques, emportant à travers les airs, 100, 200, 300, 500 hommes ou plus avec armes et bagages, et en marchant avec une vitesse de 100 à 300 kilomètres à l'heure. *J'affirme, de la manière la plus absolue, que, dès le jour où le gouvernement français le voudra, je lui construirai avec une grande rapidité, une flotte aérienne mécanique capable de transporter* 200.000 *hommes de Paris à Berlin en moins de douze heures en passant par-dessus fleuves, rivières, montagnes, etc., sans qu'aucun obstacle puisse nous arrêter.*

Inutile de dire, qu'avec une telle flotte, le gouvernement français pourrait imposer ses volontés au reste du monde, et obliger tous les gouvernements à un désarmement immédiat qui débarrasserait tous les peuples du globe de ce fardeau écrasant du budget de la guerre, qui est la ruine des sociétés modernes et la honte de l'humanité.

Voilà ce que l'on peut faire avec la navigation aérienne, telle que je la comprends, et telle, en définitive, que je suis à même de la réaliser. Ma manière de voir, je prie le lecteur de vouloir bien le remarquer, diffère du tout au tout de celle de mes prédécesseurs dans la carrière ingrate des inventions et de celle de mes contemporains. A l'encontre de mes prédécesseurs et de mes contemporains, qui seront demain mes rivaux, je n'ai pas besoin, pour naviguer dans les airs avec la rapidité de l'hirondelle et du martinet, d'autres moteurs que ceux que possède l'industrie. Les moteurs aujourd'hui connus me suffisent amplement. Et si je n'ai pas besoin de nouveaux moteurs pour m'élever et m'élancer dans les airs avec aisance et rapidité, c'est que, par des combinaisons d'organes appropriés, j'utilise d'une manière plus avantageuse qu'on ne l'a fait jusqu'à ce jour les forces

motrices actuellement connues et qui se trouvent à ma portée.

En matière de navigation aérienne mécanique, la solution plus òu moins heureuse du problème ne réside pas absolument, je le répète, dans l'intensité de la force motrice dont on dispose, mais bien dans l'habileté avec laquelle on sait utiliser la force motrice donnée, quelle qu'elle soit.

Sans doute de pareilles assertions ont besoin d'être démontrées, mais, outre que j'ai donné une démonstration rigoureuse de telles vérités dans mes conférences publiques, à la salle des Conférences du boulevard des Capucines, à la salle de l'Ermitage, rue de Jussieu, au syndicat des Inventeurs, rue de Lancry, à l'Académie d'aérostation, rue de Lutèce, et surtout dans mes communications hebdomadaires à l'*Ecole supérieure de navigation aérienne*, à l'Hôtel des Sociétés Savantes, rue Serpente, où je me suis attaché à donner des calculs irréfutables, et qui n'ont pas été réfutés, je vais présenter quelques considérations qui, pour être élémentaires, n'en seront pas moins concluantes, j'ai, du moins, tout lieu de le croire.

La question de la navigation aérienne, en ce qui concerne l'homme en particulier, se trouve, en effet, ainsi posée : Avec une force moyenne de 10 kilogrammètres par seconde qu'il possède, l'homme peut-il sérieusement s'élancer dans les airs, s'y maintenir indéfiniment, s'y diriger facilement, même contre le vent, et y marcher rapidement avec une vitesse au moins égale à celle qu'il obtient avec les chemins de fer et les navires à vapeur ?

A cette question ainsi posée, je réponds catégoriquement : OUI, *l'homme peut naviguer dans l'air avec aisance et rapidité sans autre force motrice que la sienne propre.*

Evidemment, le premier point à examiner, c'est de savoir, d'abord, si l'homme peut prendre son point d'appui sur l'air, car, sans point d'appui, le levier d'Archimède lui-même devient complètement inutile. Or, les êtres-volants prennent leur point d'appui sur l'air ; sans cela ils ne pourraient pas voler. Donc l'air est une matière assez résistante pour offrir un point d'appui puisqu'il l'offre aux oiseaux et aux insectes. Il ne s'agit que de pouvoir ou de savoir prendre ce point d'appui, et il est parfaitement certain qu'avec ses organes naturels, l'homme ne peut prendre sur

l'air ce point d'appui indispensable ; mais il peut se munir de vastes surfaces analogues aux surfaces alaires des êtres-volants et essayer d'imiter ces derniers en frappant l'air d'une manière convenable. Reste à savoir, dès lors, si, avec la puissance motrice de 10 à 15 kilogrammètres dont il dispose, l'homme est à même de mouvoir, avec la rapidité voulue, de pareils organes artificiels.

A ce propos, il faut bien remarquer qu'il n'y a point d'absurdités qui n'aient été avancées comme des vérités établies.

Si l'on veut bien examiner froidement la question, on comprend bien cependant que, vu l'aisance et la facilité avec lesquelles les êtres-volants s'élèvent, se maintiennent et se meuvent dans l'air, la prise du point d'appui au sein de l'atmosphère ne doit pas être bien terrible, ni exiger de grands efforts. Sans cela les êtres-volants aimeraient mieux rester à terre. Très certainement, si la locomotion dans l'air demandait des efforts plus considérables que la locomotion à la surface du sol, nous n'aurions pas d'êtres-volants, car les êtres-volants ne sont assurément pas plus sots que les animaux qui rampent à la surface du sol. S'ils se fatiguaient plus dans l'air qu'en restant à terre, ils ne feraient pas la bêtise de rester dans l'air, aucun animal ne consentant à se fatiguer qu'autant qu'il ne peut faire autrement. Prétendre que l'être-volant dépense, pour se maintenir dans l'air, une quantité considérable de force motrice revient donc à dire que l'être-volant est un être antinaturel et, par conséquent, un véritable monstre au milieu de l'univers. Or, l'animal-volant ne parait pas du tout, même à première vue, un être antinaturel et sans intelligence.

Malheureusement, cette question de la prise du point d'appui a été mal envisagée par la science dès le début et, ce qui est plus malheureux encore, par des mathématiciens et des ingénieurs du plus grand mérite, tels que Navier et Giffard.

Les calculs de Navier sont très justes en tant que calculs, mais le point de départ de ces calculs n'est pas en rapport avec les faits physiques. D'où des conséquences absurdes. Il est absurde, en effet, d'admettre, avec Navier, qu'un pigeon a la puissance motrice d'un cheval de labour, et un cygne, celle de vingt-cinq ou vingt-six chevaux-vapeur.

Ce sont là, cependant, des résultats auxquels sont arrivés M. Navier et tous ceux qui l'ont copié. Giffard ne dit-il pas quelque part que, pour prendre son point d'appui sur l'air, il faudrait à l'homme une puissance motrice de cinq chevaux-vapeur. Evidemment, si Giffard n'avait pas fait de découvertes plus méritoires, il serait loin de figurer parmi les grands inventeurs ; car c'est là une grosse absurdité.

Aujourd'hui encore, il n'y a pour ainsi dire pas de chercheur, sauf moi peut-être, qui ne s'imagine sérieusement que, pour prendre un point d'appui sur l'air, il faut à l'homme une puissance motrice supplémentaire de cinq ou six chevaux-vapeur.

Eh bien ! c'est un tort. *La prise du point d'appui dans l'air ne nécessite aucune dépense de force motrice.* — Tant qu'il n'y a pas de point d'appui il n'y a pas de travail employé à le produire et, dès qu'il y a point d'appui, il n'y a pas perte de travail de ce chef; tout le travail moteur dépensé devient travail ascensionnel ou propulsif utile.

En réalité, il s'agit donc de savoir si, avec la force motrice dont nous disposons, laquelle est de 10 kilogrammètres par seconde, nous pouvons donner à l'aile un mouvement assez rapide pour produire de la part de l'air une résistance supérieure au poids de l'appareil-volant, notre poids compris. Dès l'instant, en effet, où la résistance de l'air est supérieure au poids de l'appareil, il y a, évidemment, point d'appui. Dès lors, non seulement l'appareil n'a plus de tendance à tomber, mais doit, au contraire, s'élever sous l'action d'une force égale à la différence qu'il y a entre la résistance de l'air et le poids de l'appareil.

Or, la Mécanique Rationnelle nous enseigne que, pour un appareil du poids total de 200 kilos, muni d'une surface alaire de 8 mètres carrés, la vitesse avec laquelle il convient de frapper l'air, pour obtenir de la part de ce dernier une résistance de 200 kilos, doit être de 14 mètres à la seconde.

La question qui nous préoccupe se trouve par suite ainsi posée : Est-il possible, avec une force motrice de 10 kilogrammètres par seconde, de donner, à une surface alaire de 8 mètres carrés, une vitesse de 14 mètres à la seconde ?... *Sans aucun doute.*

Rappelons, à cet égard, que la formule qui donne l'espace parcouru dans un temps t par le centre de résistance de l'aile est $e = 7\ t^2$. Or, si l'on suppose t très petit, 0,001 de seconde, par exemple, on aura $e = 0{,}000007$; et, pour le travail mécanique développé pendant ce battement, $T = 0{,}000007 \times 200$ ou $T = 0^{kg}0014$. Mais il y a 1,000 battements semblables par seconde ; donc, le travail total, par seconde, sera $0{,}0014 \times 1000$ ou 1 kilogrammètre 4. — Ce travail mécanique étant inférieur à celui de 10 kilogrammètres que l'homme peut développer par seconde, il est évident que ce dernier a une puissance musculaire suffisante pour donner, à un système d'ailes de 8 mètres carrés de surface, une vitesse de 14 mètres à la seconde, et, par conséquent, pour prendre dans l'air le point d'appui nécessaire à un appareil, pesant, tout compris, 200 kilogrammes.

Si l'on appliquait l'analyse infinitésimale à la détermination du travail de l'aile chez les volateurs, on arriverait, d'ailleurs, facilement, à établir, de la manière la plus rigoureuse, que la prise du point d'appui ne demande pas le moindre développement de force motrice ; mais je ne rappellerai que plus loin cette démonstration donnée à diverses reprises dans mes conférences publiques.

Le travail relatif à la prise du point d'appui est donc NUL, contrairement aux assertions de Navier, de Giffard, de Flammarion et de tous ceux qui ont écrit sur cette importante question

Pour prendre son point d'appui dans l'air, l'homme n'a pas besoin de développer plus d'efforts qu'il n'en développe pour prendre son point d'appui à la surface du sol, et cette assertion, que les objectionneurs acharnés considèrent sans doute comme émanant d'un cerveau mal équilibré, est susceptible, je le répète, d'une démonstration mathématique d'une rigueur absolue, incontestable pour tous ceux qui sont familiarisés avec le Calcul Différentiel et le Calcul Intégral.

Dès qu'il est établi que l'homme peut prendre son point d'appui sur l'air sans développer la moindre puissance motrice, il est assez aisé de comprendre qu'il pourra, par suite, s'élever facilement dans l'air comme aussi s'y mouvoir rapidement dans n'importe quelle direction. Aussi je ne m'étendrai pas à cet égard et je terminerai ce trop long



paragraphe en posant comme principes susceptibles d'une démonstration mathématique rigoureuse :

1° Quelle que soit la puissance motrice dont on dispose, il est toujours possible, à l'aide de cette force motrice, d'élever dans l'air un appareil-volant de poids quelconque, de l'y maintenir indéfiniment et de l'y mouvoir dans toutes les directions, même contre le vent, avec une vitesse de 100 à 300 kilomètres à l'heure ;

2° La question de la navigation aérienne est une question de dispositions mécaniques et nullement une question de force motrice, et tous les moteurs actuellement usités et connus dans l'industrie sont largement suffisants pour que l'homme puisse, avec leur concours, naviguer dans les airs avec aisance et rapidité ;

3° Les dispositions mécaniques à adopter sont, d'ailleurs, variables à l'infini, et l'on peut adopter, à son gré, soit des hélices, soit des ailes soit des hélices et des ailes. Le succès dépend de l'habileté de l'ingénieur à combiner les différents éléments, et, à ce point de vue, la question de la navigation aérienne ne présente pas plus de difficultés que les autres grandes industries qui émerveillent depuis longtemps le public et enrichissent les sociétés contemporaines.

Quant aux conséquences économiques, sociales et politiques que la navigation aérienne doit avoir, le lecteur peut s'en faire une idée par cette déclaration que je ne donne pas à la légère ; *On peut construire des navires aériens allant de Paris à Nev-York en moins de deux jours, et de Paris à Berlin en cinq ou six heures ; les transports par navires aériens mécaniques seront plus rapides, moins coûteux et plus sûrs que par les chemins de fer.*

II

Lois de la chute d'un plan mince horizontal tombant librement dans l'air.

Lorsqu'un corps quelconque tombe d'un point plus ou moins élevé de l'atmosphère, il éprouve de la part de l'air une certaine résistance qui dépend de sa masse et de sa forme.

Je me propose d'étudier dans ce paragraphe la loi de la chute d'un plan mince de poids P et de surface S, tombant librement d'une certaine hauteur. Je supposerai d'ailleurs que le plan reste constamment horizontal.

Il est généralement admis, dans ce cas, que la résistance R, à un instant quelconque t, s'exprime par

$$R = K m S V^2,$$

m étant la masse d'un mètre cube d'air, V, la vitesse à l'instant considéré, et K, un coefficient variable.

Il est inutile de dire que la résistance R agit de bas en haut et est négative si P, qui agit de haut en bas, est positif.

La force réelle qui sollicite le corps en mouvement est, évidemment, égale à P — R, et s'exprime par

$$P - K m S V^2.$$

Mais, d'un autre côté, en raison de ce que les forces sont proportionnelles au produit des masses par les accélérations, cette même force qui sollicite le corps peut s'exprimer par

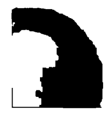
$$M w,$$

M représentant la masse du plan mince ou $\frac{P}{g}$, et w l'accélération du mouvement à l'instant t.

On aura donc

$$M w = P - K m S V^2,$$

ou bien, en remplaçant P par sa valeur Mg, et en faisant $K m S = \frac{Mg}{K_1^2}$,



$$Mw = Mg - \frac{Mg}{K_1^2} V^2 ;$$

et, en supprimant le facteur commun M,

(1) $$w = g - g \frac{V^2}{K_1^2}.$$

C'est l'équation du mouvement à chaque instant.

Pour nous servir de cette équation, nous remarquerons que V, la vitesse, n'est autre chose que la limite vers laquelle tend, à partir de l'instant t, le rapport de l'accroissement infiniment petit de l'espace parcouru, accroissement représenté par dx, à l'accroissement infiniment petit du temps représenté par dt, lorsque ce dernier accroissement tend vers zéro.

En d'autres termes, on a

$$V = \frac{dx}{dt}.$$

Ce que l'on exprime en disant que la vitesse est la dérivée de l'espace par rapport au temps.

On dit et on écrit de même

$$w = \frac{dV}{dt},$$

ou, encore,

$$w = \frac{d^2x}{dt^2},$$

ce qu'on exprime, en langage ordinaire, en disant que l'accélération est la dérivée première de la vitesse par rapport au temps, ou la dérivée seconde de l'espace par rapport au temps.

Si dans l'équation (1) nous remplaçons V par $\frac{dx}{dt}$ et w par $\frac{d^2x}{dt^2}$, nous aurons

(2) $$\frac{d^2x}{dt^2} = g - \frac{g}{K_1^2}\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

C'est l'équation différentielle du mouvement sous sa forme la plus générale.

Il s'agit de résoudre cette équation et de déterminer, par le calcul, et sous une forme simple, toutes les circonstances du mouvement.

Or, l'équation (2) n'est autre chose que l'équation

$$\frac{dV}{dt} = g - g\frac{V^2}{K_1^2},$$

que l'on peut écrire

$$\frac{dV}{dt} = \frac{g(K_1^2 - V^2)}{K_1^2},$$

et, par suite,

$$g\,dt = \frac{K_1^2\,dV}{K_1^2 - V^2},$$

ou encore

$$\frac{2g\,dt}{K_1} = \frac{2K_1 dV}{K_1^2 - V^2},$$

ou bien

$$\frac{2g\,dt}{K_1} = \frac{(K_1 + V + K_1 - V)\,dV}{K_1^2 - V^2},$$

comme aussi

$$\frac{2g}{K_1}dt = \frac{dV(K_1 + V)}{K_1^2 - V^2} + \frac{dV(K_1 - V)}{K_1^2 - V^2},$$

ou

$$\frac{2g}{K_1}dt = \frac{dV}{K_1 - V} + \frac{dV}{K_1 + V}.$$

Et, en venant à l'équation intégrale,

$$(3) \qquad \frac{2g}{K_1}t + C = -L(K_1 - V) + L(K_1 + V),$$

L étant la lettre caractéristique dont on fait généralement usage pour désigner les logarithmes népériens, et C une constante arbitraire.

Or, l'équation (3) peut se mettre sous la forme

$$\frac{2gt}{K_1} + C = L\frac{K_1 + V}{K_1 - V}.$$

D'où l'on déduit, d'après la théorie bien connue des logarithmes,

$$\frac{K_1 + V}{K_1 - V} = e^{\frac{2gt}{K_1} + C},$$

e étant la base des logarithmes népériens ou le nombre 2,7182818.

On a ensuite, en vertu de la théorie des rapports,

$$\frac{K_1+V-K_1+V}{K_1+V+K_1-V}=\frac{e^{\frac{2gt}{K_1}+c}-1}{e^{\frac{2gt}{K_1}+c}+1},$$

et, en réduisant,

$$\frac{V}{K_1}=\frac{e^{\frac{2gt}{K_1}+c}-1}{e^{\frac{2gt}{K_1}+c}+1},$$

ou

$$V=K_1\frac{e^{\frac{2gt}{K_1}+c}-1}{e^{\frac{2gt}{K_1}+c}+1}, \tag{4}$$

équation qui donne la vitesse à un instant quelconque, en fonction du temps et d'une constante arbitraire.

III

Ensemble des formules relatives au mouvement d'un plan mince horizontal tombant librement dans l'air.

Pour déduire de là l'espace parcouru en fonction du temps, il n'y a qu'à remonter une seconde fois de la dérivée à la fonction, c'est-à-dire intégrer une seconde fois.

On a d'abord, puisque $V = \frac{dx}{dt}$,

$$\frac{dx}{dt} = K_1 \frac{e^{\frac{2gt}{K_1}+C} - 1}{e^{\frac{2gt}{K_1}+C} + 1},$$

ou

$$dx = K_1 \frac{e^{\frac{2gt}{K_1}+C} - 1}{e^{\frac{2gt}{K_1}+C} + 1} dt,$$

ou encore, en divisant haut et bas par $e^{\frac{gt}{K_1}+\frac{C}{2}}$,

$$dx = K_1 \frac{e^{\frac{gt}{K_1}+\frac{C}{2}} - e^{-\frac{gt}{K_1}-\frac{C}{2}}}{e^{\frac{gt}{K_1}+\frac{C}{2}} + e^{-\frac{gt}{K_1}-\frac{C}{2}}}$$

Mais le numérateur de cette fraction est la différentielle, à une constante près, du dénominateur, et l'on a

$$dx = \frac{K_1 \times K_1}{g} \times \frac{d\left(e^{\frac{gt}{K_1}+\frac{C}{2}} + e^{-\frac{gt}{K_1}-\frac{C}{2}}\right)}{e^{\frac{gt}{K_1}+\frac{C}{2}} + e^{-\frac{gt}{K_1}-\frac{C}{2}}}$$

ou

$$x = \frac{K_1^2}{g} L\left(e^{\frac{gt}{K_1}+\frac{C}{2}} + e^{-\frac{gt}{K_1}-\frac{C}{2}}\right) + LA$$

en désignant par LA la constante arbitraire, ou bien, encore

$$(5) \qquad x = \frac{K_1^2}{g} L\left(\frac{e^{\frac{2gt}{K_1}+C} + 1}{e^{\frac{gt}{K_1}+\frac{C}{2}}}\right) + LA.$$



Déterminons les constantes par la condition que l'on ait $V = 0$ et $x = 0$ pour $t = 0$. On déduit de l'équation (4)

$$0 = K_1 \frac{e^C - 1}{e^C + 1},$$

ce qui donne $C = 0$.

Faisons ensuite $C = 0$ dans l'équation (5) ; on a

$$x = \frac{K_1^2}{g} L \frac{e^{\frac{2gt}{K_1}} + 1}{e^{\frac{gt}{K_1}}} + LA.$$

Or, pour $t = 0$, le second membre de cette égalité se réduit à

$$\frac{K_1^2}{g} L2 + LA$$

On doit donc avoir

$$\frac{K_1^2}{g} L2 + LA = 0.$$

D'où, pour LA, la valeur $-\frac{K_1^2}{g} L2$.

On aura, par suite,

$$x = \frac{K_1^2}{g} L \frac{e^{\frac{2gt}{K_1}} + 1}{2e^{\frac{gt}{K_1}}},$$

ou, sous une forme un peu différente,

(6) $$x = \frac{K_1^2}{g} L \frac{1}{2}\left(e^{\frac{gt}{K_1}} + e^{-\frac{gt}{K_1}}\right).$$

En faisant $C = 0$ dans l'équation (4), on a

$$V = K_1 \frac{e^{\frac{2gt}{K_1}} - 1}{e^{\frac{2gt}{K_1}} + 1},$$

et, en divisant le numérateur et le dénominateur par $e^{\frac{gt}{K_1}}$

(7) $$V = K_1 \frac{e^{\frac{gt}{K_1}} - e^{-\frac{gt}{K_1}}}{e^{\frac{gt}{K_1}} + e^{-\frac{gt}{K_1}}}.$$

C'est l'expression définitive de la vitesse à un instant quelconque t, après la détermination de la constante.

On peut aussi trouver une relation entre l'espace parcouru et la vitesse.

On a, en effet,

$$\frac{dV}{dt} = \frac{d^2x}{dt^2} \text{ et } V = \frac{dx}{dt},$$

D'où

$$V\,dV = \frac{d^2x}{dt^2}\,dx.$$

Or

$$\frac{d^2x}{dt^2} = g - g\,\frac{V^2}{K_1^2}.$$

Par suite

$$V\,dV = \left(g - g\,\frac{V^2}{K_1^2}\right)dx,$$

ou

$$V\,dV = g\,\frac{K_1^2 - V^2}{K_1^2}\,dx,$$

ou, encore,

$$\frac{V\,dV}{K_1^2 - V^2} = \frac{g}{K_1^2}\,dx.$$

D'où

$$\frac{1}{2}\,\frac{d(V^2)}{K_1^2 - V^2} = \frac{g}{K_1^2}\,dx,$$

ou bien

$$-\frac{d(K_1^2 - V^2)}{K_1^2 - V^2} = \frac{2g}{K_1^2}\,dx.$$

Et, en intégrant,

$$L(K_1^2 - V^2) = -\frac{2gx}{K_1^2} + C,$$

C désignant encore une constante arbitraire.

Or, pour $x = 0$, V doit être nulle. On a donc $C = 2LK_1$.

Dès lors

$$L(K_1^2 - V^2) = -\frac{2gx}{K_1^2} + 2LK_1$$

ou

$$L(K_1^2 - V^2) - 2LK_1 = -\frac{2gx}{K_1^2},$$

ou, encore,

$$\mathrm{L}\,\frac{K_1^2 - V^2}{K_1^2} = -\frac{2gx}{K_1^2}.$$

D'où l'on tire, d'après une propriété connue des logarithmes,

$$\frac{K_1^2 - V^2}{K_1^2} = e^{-\frac{2gx}{K_1^2}},$$

ou

$$K_1^2 - V^2 = K_1^2\, e^{-\frac{2gx}{K_1^2}},$$

et enfin

(8) $$V^2 = K_1^2\left(1 - e^{-\frac{2gx}{K_1^2}}\right),$$

ce qui donne la vitesse en fonction de l'espace parcouru.

Résolvons cette équation par rapport à x.

On a successivement

$$1 - e^{-\frac{2gx}{K_1^2}} = \frac{V^2}{K_1^2},$$

D'où

$$\frac{V^2 - K_1^2}{K_1^2} = -e^{-\frac{2gx}{K_1^2}},$$

ou

$$\frac{K_1^2 - V^2}{K_1^2} = e - \frac{2gx}{K_1^2} = \frac{1}{e^{\frac{2gx}{K_1^2}}},$$

et, par suite,

$$e^{\frac{2gx}{K_1^2}} = \frac{K_1^2}{K_1^2 - V^2},$$

d'où

$$\frac{2gx}{K_1^2} = \mathrm{L}\,\frac{K_1^2}{K_1^2 - V^2},$$

ou bien

(9) $$x = \frac{K_1^2}{2g}\,\mathrm{L}\,\frac{K_1^2}{K_1^2 - V^2}.$$

Résumant ces calculs, nous avons, en définitive, pour déterminer toutes les circonstances de la chute d'un plan horizontal mince de poids P et de surface S, les formules

(A) $$x = \frac{K_1^2}{2g} L \frac{K_1^2}{K_1^2 - V^2},$$

(B) $$V^2 = K_1^2 \left(1 - e^{-\frac{2gx}{K_1^2}}\right)$$

(C) $$V = K_1 \frac{e^{\frac{gt}{K_1}} - e^{-\frac{gt}{K_1}}}{e^{\frac{gt}{K_1}} + e^{-\frac{gt}{K_1}}}$$

(D) $$x = \frac{K_1^2}{g} L \frac{e^{\frac{2gt}{K_1}} + 1}{2e^{\frac{gt}{K_1}}}$$

Dans lesquelles on a d'abord

$$K_1 = \sqrt{\frac{Mg}{KmS}} \qquad \text{et} \qquad e = 2,7182818,$$

tandis que M représente la masse du corps tombant ou le nombre $\frac{P}{g}$, m, la masse d'un mètre cube d'air ou le nombre 0,13, S, la surface du plan, évaluée en mètres carrés, et K un coëfficient arbitraire variable avec la forme et l'étendue de la surface, que l'on détermine par l'expérience, et qui est généralement supérieur à 1.

En faisant les substitutions on obtient

(E) $$x = \frac{1}{2g} \frac{P}{K\,0,13\,S} L \frac{P}{P - K\,0,13\,S V^2}$$

(F) $$V = \frac{P}{K\,0,13\,S}\left(1 - e^{\frac{2K\,0,13\,S}{P} g x}\right)$$

(G) $$V = \sqrt{\frac{P}{K\,0,13\,S}} \; \frac{e^{2\sqrt{\frac{K\,0,13\,S}{P}} gt} - 1}{e^{2\sqrt{\frac{K\,0,13\,S}{P}} gt} + 1}$$

(H) $$x = \frac{1}{g} \frac{P}{K\,0,13\,S} L \frac{e^{2\sqrt{\frac{K\,0,13\,S}{P}} gt} + 1}{2e^{\sqrt{\frac{K\,0,13\,S}{P}} gt}}$$

Nous reviendrons sur ces formules dont l'application est très importante en matière de navigation aérienne proprement dite.

IV

La résistance de l'air, par unité de surface, augmente rapidement avec l'étendue des surfaces

L'expression purement théorique la plus généralement admise pour évaluer la résistance éprouvée par un plan mince en mouvement dans l'air est

$$R = m S V^2,$$

si le plan est perpendiculaire à la direction du mouvement,

$$R = m S \sin \alpha V^2,$$

si ce plan est incliné de l'angle α sur la direction du mouvement.

Dans ces deux équations, R représente la résistance de l'air, évaluée en kilogrammes, m la masse d'un mètre cube d'air, ou le nombre 0,13, provenant de la division du poids de ce mètre cube d'air, 1 k. 300, par l'intensité de la pesanteur, $g = 9,8088$; S représente la surface du plan, évaluée en mètres carrés, et V, la vitesse du mouvement, évaluée en mètres.

Mais ces deux expressions de R sont absolument théoriques et déterminées avec l'hypothèse que les diverses molécules d'air, que le plan rencontre dans son mouvement, lui livrent facilement passage pour lui permettre d'aller frapper successivement toutes les molécules qui se trouvent devant lui.

Or, il est évident qu'il n'en est pas tout à fait ainsi, et que la résistance, éprouvée par le plan, rapportée à l'unité de surface, doit être d'autant plus grande que les différentes molécules d'air éprouvent plus de difficultés à s'échapper latéralement.

On voit aisément, d'ailleurs, que la facilité qu'ont les molécules d'air à s'échapper latéralement est proportionnelle à la longueur du périmètre ou contour du plan.

Si, à égalité de surface, le périmètre est deux fois plus développé, les molécules d'air ont deux fois plus d'espace pour s'échapper et, par conséquent, doivent s'écouler plus rapidement.

On comprend aussi que la difficulté d'écoulement, pour chaque molécule, est d'autant plus grande que la distance de cette molécule au contour ou périmètre est plus grande.

Considérons une surface plane ayant la forme d'un cercle de rayon r.

La circonférence de ce cercle est $2\pi r$, et sa surface, πr^2, π désignant, selon l'usage, le rapport de la circonférence au diamètre ou le nombre 3,1416.

La facilité ou la difficulté d'écoulement latéral de l'air, rapportée à l'unité de surface, ou au mètre carré, pourra, évidemment, être représentée par

$$\frac{2\pi r}{\pi r^2} \quad \text{ou} \quad \frac{2}{r},$$

expression qui donne le développement du périmètre général correspondant à chaque mètre carré de surface.

La résistance, par mètre carré, sera, évidemment, d'autant plus grande que cette quantité $\frac{2}{r}$ sera plus petite. Cette résistance, par mètre carré, sera donc proportionnelle, toutes choses égales, d'ailleurs, à la quantité inverse $\frac{r}{2}$, et, par conséquent, pourra être représentée par cette quantité $\frac{r}{2}$.

Mais si, dans cette quantité $\frac{r}{2}$, nous faisons successivement r égal à

$$1,\ 2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ \ldots\ldots$$

nous aurons pour $\frac{r}{2}$ les nombres correspondants

$$\frac{1}{2},\ 1,\ \frac{3}{2},\ 2,\ \frac{5}{2},\ 3,\ \frac{7}{2},\ 4,\ \frac{9}{2},\ 5,\ \ldots\ldots$$

Ces chiffres montrent clairement que, si le rayon r devient 10 fois plus grand par exemple, la difficulté d'écoulement et, par conséquent, la résistance, par chaque mètre carré de surface, doit être 10 fois plus grande.

On peut déduire de là qu'en ne tenant compte que de cette cause d'accroissement de résistance, les formules

$$R = mSV^2, \qquad R = mS \sin\alpha V^2,$$

doivent être remplacées par

$$R = KmSV^2, \qquad R = KmS \sin\alpha V^2,$$

dans lesquelles K représente un coefficient arbitraire constant pour chaque surface particulière, mais croissant très rapidement avec l'étendue de la surface S.

La difficulté d'écoulement de l'air est encore d'autant plus grande que r est plus grand, parce que les distances que la plupart des molécules d'air ont alors à parcourir sont, pour cette cause, d'autant plus grandes que r est plus grand.

Pour ce motif, le coefficient K doit encore, par suite, être plus grand que nous venons de le dire.

Le rapport du périmètre à la superficie, changeant avec la forme de la surface, il est évident que le coefficient K n'est pas, non plus, le même, à égalité de superficie, pour les surfaces de différente nature.

Des considérations qui précèdent, il est aisé de déduire, en somme, que la forme et l'étendue des surfaces planes en mouvement dans l'air, de même que pour les autres d'ailleurs, exercent une très grande influence sur la résistance que le mètre carré de ces surfaces éprouve de la part de l'air. Sous une autre forme, on peut dire que l'air, par mètre carré de surface, supporte d'autant plus que l'on s'appuie sur lui par des surfaces de plus grande étendue.

Pour qu'un plan de poids P reste en suspension dans l'atmosphère, il faut, évidemment, que la résistance de l'air fasse équilibre au poids P.

Dans le cas où le plan est horizontal, il faut que l'on ait constamment

$$P = KmSV^2. \tag{1}$$

Dans le cas où le plan est incliné de l'angle α sur l'horizon, il faut que la résistance R, estimée dans le sens vertical, soit égale à P.

Or, la résistance R, estimée dans le sens vertical, est $R \cos\alpha$.

On doit donc avoir

$$P = R \cos\alpha,$$

ou

$$P = KmS \sin\alpha \cos\alpha V^2. \tag{2}$$

Pour que le plan s'élève, il faut nécessairement que l'on ait, selon les cas,

$$(3) \qquad KmSV^2 > P,$$

$$(4) \qquad KmS \sin \alpha \cos \alpha V^2 > P,$$

le signe $>$ signifiant, comme on sait, que le premier membre de ces inégalités est *plus grand* que le second.

Remarquons que, dans les seconds membres des équations (1) et (2) ou dans les premiers membres des inégalités (3) et (4), nous avons trois facteurs variables, K, S, V^2. Dans le second membre de l'équation (2) et dans le premier de l'inégalité (4), il y a même en plus une quatrième variable α.

Dans tous les cas, il y a donc une infinité de manières de répondre à la question.

On peut prendre S plus grand et T plus petit, et réciproquement. De même pour α.

Les remarques que nous venons de développer expliquent d'elles-mêmes ce fait, au premier abord étrange, que les êtres-volants ont une rapidité de mouvements d'ailes d'autant plus grande qu'ils sont plus petits et ont une surface alaire moindre.

S et K étant très petits, il faut nécessairement que V soit très-grand.

Dans la série animale des êtres volants, S et K devenant de plus en plus grands, V devient par suite de plus en plus petit.

On peut également déduire de ce qui précède que la surface alaire est loin de croître dans la même proportion que le poids.

En admettant que, dans les appareils d'aviation, la surface alaire doit croître proportionnellement au poids, on commet donc une grave erreur.

Cela n'existe pas, d'ailleurs, chez les êtres-volants. La *Cigogne* et la *Grue d'Australie* en sont un exemple frappant :

Le poids de la Cigogne étant de 2 k. 2265, et la surface de ses ailes de 0 m^2 4426, tandis que le poids de la Grue d'Australie est de 9 k. 500 et la surface de ses ailes de 0 m^2 8543, on voit aisément que le rapport des poids est 4,636, tandis que le rapport des surfaces alaires est seu-

lement 1,934. D'où l'on conclut que les poids croissent 2,39 fois plus vite que les surfaces alaires.

Si l'on compare le Pigeon et la Grue d'Australie, on trouve des accroissements de poids bien plus rapides encore, par rapport à l'accroissement des surfaces alaires.

Le poids du Pigeon est, en effet, de 0 k. 290, et sa surface alaire de 0 m² 0861.

Le rapport des poids devient, dans ce cas, 32,758, tandis que celui des surfaces alaires est 9,922.

D'où l'on conclut que le poids croît 3,32 fois plus vite que la surface alaire.

La loi d'accroissement de la résistance de l'air, au mouvement des plans minces dans l'atmosphère, par rapport à l'unité de surface, quand l'étendue de ces plans augmente, est donc une loi générale dont il est aisé de constater l'application naturelle aux mouvements des êtres-volants.

D'où l'on peut poser en principe que, dans les appareils d'aviation : *La surface alaire croît beaucoup plus lentement que le poids.*

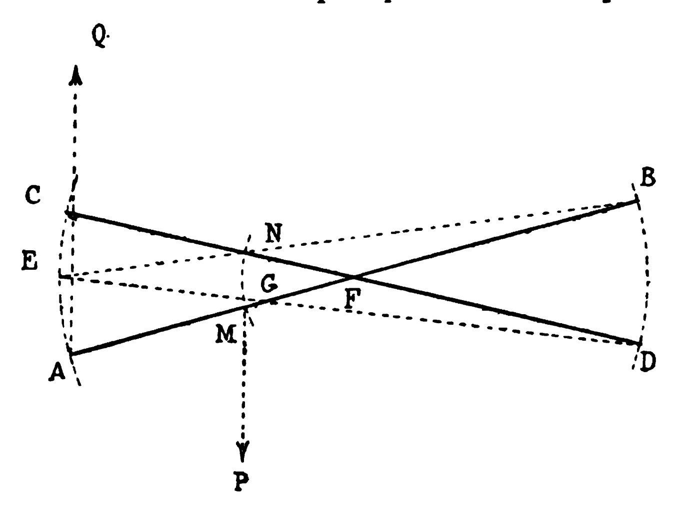
V

Chez les volateurs le point d'appui est fixe et non fuyant. *Ce principe est la base de la théorie mathématique de la navigation aérienne.* **La prise du point d'appui dans l'air ne nécessite pas de développement de force motrice.**

Tous les mathématiciens qui ont essayé d'appliquer le calcul à l'étude de la navigation aérienne sont arrivés à cette conclusion terrible que la prise du point d'appui dans l'air nécessite un développement considérable de force motrice. Giffard, notamment, a écrit quelque part que, pour prendre son point d'appui sur l'air, l'homme a besoin d'une puissance motrice supplémentaire de cinq ou six chevaux-vapeur.

C'est là une erreur grossière, qu'il est aisé de détruire en faisant un usage convenable des principes si féconds que nous fournit l'analyse infinitésimale.

Soient, en effet, AB la position d'une aile de volateur à un instant donné *t*, et CD la position de la même aile au bout de l'instant infiniment petit qui succède au temps *t*.



Admettons, pour plus de simplicité, qu'il ne soit question que du mouvement ascensionnel et d'une seule des deux ailes. Désignons par Q la puissance ou force motrice agissant en A de bas en haut, et par P le poids appliqué au point d'attache M et agissant, naturellement, de haut en bas, ce qui suppose que, s'il y a deux ailes, le poids total est représenté par 2 P et la puissance motrice par 2 Q.

M et N étant les deux positions successives, infiniment voisines du point d'attache de l'aile, j'admettrai que B et D sont les positions successives infiniment voisines du centre de résistance de la surface alaire. Les points d'appui correspondants sont, évidemment, aux mêmes points, mais, alors, considérés comme appartenant à l'air sur lequel on s'appuie.

Tirons les lignes ENB et EGD, et soient F et G les points de rencontre de AB avec CD et de AB avec ED.

Il est évident qu'en raison du temps infiniment petit que nous considérons, les trajectoires AEC, MN et BD peuvent être considérées comme des lignes droites.

Le travail élémentaire qu'il faut réaliser pour amener l'aile de la position AB à la position CD est, évidemment, égal au produit de l'effort Q appliqué en A, par le chemin parcouru AC, ou bien, à $Q \times AC$.

Si l'on considère le point B comme fixe à chaque instant et pendant un temps infiniment petit, le travail de la force Q se trouvera représenté par le produit $Q \times AE$.

Il s'agit de montrer que, dans l'évaluation du travail élémentaire de l'aile, on peut prendre, pour valeur de ce travail, la quantité

$$Q \times AE \text{ au lieu de } Q \times AC.$$

Ce qui revient à considérer le point d'appui comme fixe à chaque instant.

Pour cela, remarquons que les triangles isocèles ACF et BDF sont semblables et donnent

$$\frac{AC}{AF} = \frac{BD}{BF}, \quad \text{d'où (1)} \quad AC = \frac{AF}{BF} \times BD.$$

Les triangles semblables AEG et BDG donnent de même

$$\frac{AE}{AG} = \frac{BD}{BG}, \quad \text{d'où (2)} \quad AE = \frac{AG}{BG} \times BD.$$

Divisant l'une par l'autre et membre à membre les expressions (1) et (2), on obtient

$$(3) \qquad \frac{AC}{AE} = \frac{AF}{AG} \times \frac{BG}{BF}.$$

Mais, lorsque le temps pendant lequel nous considérons le mouvement devient de plus en plus petit, les points F et G se rapprochent de plus en plus jusqu'à se confondre.

Le rapport $\frac{AF}{AG}$ et le rapport $\frac{BG}{BF}$ ont donc pour limite l'unité.

Or, si, dans l'expression (3), nous passons aux limites, nous aurons

$$\text{limite} \frac{AC}{AE} = \text{limite} \frac{AF}{AG} \times \text{limite} \frac{BG}{BF}$$

et, par suite,

$$\text{limite} \frac{AC}{AE} = 1.$$

D'un autre côté, on démontre, dans le *calcul différentiel*, que, lorsque le rapport de deux infiniment petits AC et AE tend vers l'unité, l'on peut, dans les calculs, prendre ces deux infinement petits l'un pour l'autre, et cela, d'ailleurs, sans commettre la moindre erreur.

Le travail élémentaire de l'aile se trouve donc représenté rigoureusement par le produit

$$Q \times AE$$

que l'on obtient en considérant le point d'appui comme fixe.

L'on démontre aussi, facilement, dès le début du *calcul différentiel*, que le rapport de la différence de deux infiniment petits de même ordre à l'un quelconque de ces deux infiniment petits est un infiniment petit d'un ordre plus élevé.

Il résulte de là que CE, qui représente la différence de deux infiniment petits du premier ordre, AC et AE, est un infiniment petit du deuxième ordre au moins.

Mais on a

$$AC = AE + EC,$$

comme, aussi,

$$Q \times AC = Q \times AE + Q \times EC.$$

Or, $Q \times AC$ représente le travail élémentaire total qu'il faut développer pour amener l'aile de la position AB à la position CD, et ce travail est, évidemment, un infiniment petit du premier ordre, puisque AC est un infiniment petit du premier ordre.

$Q \times AE$ représente, à son tour, le travail élémentaire de l'aile quand on considère le point d'appui comme fixe à chaque instant, et ce travail est encore un infiniment petit du premier ordre, puisque AE est un infiniment petit du premier ordre.

$Q \times CE$ représente, enfin, le travail infiniment petit dû au manque de fixité du point d'appui, et ce travail est un infiniment petit du deuxième ordre, puisque CE est un infiniment petit du deuxième ordre au moins.

Le travail élémentaire ou infiniment petit de l'aile se compose donc d'un infiniment petit du premier ordre, qui représente le travail de l'aile en considérant le point d'appui comme fixe, et d'un infiniment petit d'ordre supérieur, qui représente le travail perdu par suite du manque de fixité du point d'appui.

Remarquons, maintenant, que, pour avoir le travail total de l'aile, pendant un temps fini quelconque, il faut faire la somme de tous les travaux élémentaires, en d'autres termes, *intégrer*.

Le travail total de l'aile se composera donc d'une somme, en nombre infini, d'infiniment petits du premier ordre, et d'une somme, en nombre également infini, d'infiniment petits d'ordre supérieur.

Mais il est établi, comme base du *calcul intégral*, que dans une somme, en nombre infini, d'infiniment petits de différents ordres, il n'y a à tenir compte que des infiniment petits de l'ordre le moins élevé, la somme des autres étant rigoureusement nulle.

Dans l'évaluation du travail de l'aile, il n'y a donc pas à tenir compte du travail perdu par suite du manque de fixité du point d'appui, *ce travail étant rigoureusement nul*, par cela même qu'il est représenté par des infiniment petits du deuxième ordre au moins.

Remarquons encore que le travail élémentaire Q × AE, qui représente, à un infiniment petit du deuxième ordre près, le travail élémentaire de l'aile, est exactement égal au travail de la résistance utile, P × MN, en vertu des lois qui régissent le levier.

Il suit de là que la prise du point d'appui dans l'air est entièrement gratuite, le travail élémentaire dû à la prise du point d'appui étant, je le répète, un infiniment petit du deuxième ordre, par rapport au travail élémentaire total qui est un infiniment petit du premier ordre.

Sous une autre forme, nous dirons :

Le point d'appui est toujours fixe et gratuit, qu'on le prenne dans l'air, dans l'eau ou à la surface du sol. Les appareils au moyen desquels on le prend sont, seuls, différents.

Remarquons, d'ailleurs, que le principe établi au commencement de cet article revient exactement à ceci :

Chez les êtres ou appareils volants, en mouvement dans l'air, les déplacements infiniment petits du centre de résistance de l'aile, quelle qu'elle soit, qui correspond à ce qu'on appelle vulgairement le point d'appui, sont des déplacements infiniment petits d'ordre supérieur aux déplacements infiniment petits correspondants des autres points de l'aile.

Ce qui signifie que *le centre de résistance de l'aile est un centre instantané de rotation.*

Ce principe, sur lequel nous reviendrons plus tard, est la base de la théorie mathématique de la *navigation mécanique aérienne.*

VI

Le travail mécanique à développer pour se maintenir à une hauteur moyenne dans l'air est d'autant moindre que le nombre de battements par seconde est plus considérable.

La plupart des personnes qui cherchent à résoudre l'important problème de la navigation aérienne se disent :

« L'homme ne pourra jamais, par le seul effet de sa puissance musculaire, s'élever et se maintenir dans l'air, et cela parce que la pesanteur tend à le faire tomber de 5 mètres par seconde et qu'il ne pourra jamais, par un nombre quelconque de battements d'ailes, contrebalancer l'influence de la planète ».

Je prétends absolument le contraire.

Remarquons d'abord qu'il n'est pas exact de dire que la pesanteur tend à faire tomber de 5 mètres par seconde les corps qui se trouvent en suspension dans l'atmosphère.

En effet, la formule bien connue, qui représente la loi de la chute des corps dans le vide, s'exprime par

$$e = \frac{1}{2} g t^2,$$

dans laquelle e représente l'espace parcouru, g l'intensité de la pesanteur ou le nombre 9,80 dont la moitié est 4,90, ou, en chiffres ronds, 5, pendant que t représente le temps, évalué en secondes.

Si, dans cette formule, on remplace $1/2\,g$ par sa valeur approximative, 5, et si l'on fait, en même temps, t égal à 1, 2, 3, 4, 5, etc. secondes, on obtient, pour e, les valeurs correspondantes

5, 20, 45, 80, 125.

Ce sont là les espaces parcourus au bout de la première, de la deuxième, de la troisième, de la quatrième, de la cinquième, etc. secondes.

En sorte que, pendant la première seconde de chute, le

corps parcourt 5 mètres ; pendant la deuxième seconde, 15 mètres, c'est-à-dire 20 moins 5 ; pendant la troisième, 25, c'est-à-dire 45 moins 20 ; pendant la quatrième, 35 ; pendant la cinquième, 45, etc.

Ceci montre qu'un corps qui tombe ne parcourt pas précisément 5 mètres par seconde, mais bien 5 mètres pendant la première seconde de chute, 15 mètres pendant la deuxième, 25 mètres pendant la troisième, 35 mètres pendant la quatrième, 45 mètres pendant la cinquième, etc.

Reprenons la formule

$$e = \frac{1}{2} g t^2,$$

ou, plus simplement, $e = 5\, t^2$.

Si le temps de la chute est d'une seconde, c'est-à-dire si $t = 1$, il est évident que nous aurons $e = 5$.

Le poids d'un homme étant, en moyenne, de 70 kilos, il faudra, par suite, à celui-ci, pour remonter à sa hauteur première, un effort musculaire correspondant à 350 kilogrammètres, produit de 70 par 5. (Le kilogrammètre est l'effort moteur qu'il faut faire pour élever 1 kilogramme à la hauteur de 1 mètre.)

Or, l'homme, considéré comme moteur, ne peut développer qu'un effort moyen de 10 kilogrammètres par seconde.

La question du maintien de l'homme dans l'air par le seul effet de sa puissance musculaire, envisagée sous cette forme, paraît donc absolument insoluble. Par suite, on est tenté de croire que ceux qui affirment que l'homme ne saurait se maintenir dans l'air par le seul effet de sa puissance musculaire ont complètement raison.

Mais si, au lieu de considérer des chutes d'une seconde entière, on considère des chutes ayant pour durées des fractions de seconde de plus en plus petites, on va voir aisément que la question change du tout au tout.

Supposons, en effet, par exemple, que $t = 0{,}001$ de seconde, on aura

$$e = 0^{m}{,}000005.$$

Pour se relever à la première hauteur, le travail mécanique à développer sera

$$0{,}000005 \times 70, \text{ ou } 0 \text{ kgm. } 00035.$$

Et comme il y a, par seconde, 1000 chutes semblables, et par conséquent 1000 relèvements, le travail total à réaliser alors sera 1000 fois plus grand, ou 0 kgm. 35.

En usant d'un pareil artifice, le fractionnement de la seconde, l'homme possède donc toute la puissance musculaire nécessaire pour se maintenir à une certaine hauteur dans l'air.

D'une manière générale, soit n le nombre de divisions de la seconde ; on a alors

$$t = \frac{1}{n};$$

par suite,

$$e = \frac{5}{n^2}.$$

Si P désigne le poids de l'homme ou du corps à maintenir dans l'air, on aura, pour le travail mécanique à développer pendant un $n^{\text{ième}}$ de seconde,

$$P \times e = \frac{5\,P}{n^2}.$$

Et pendant une seconde ou n $n^{\text{ièmes}}$,

$$\frac{5\,P\,n}{n^2} \text{ ou } \frac{5\,P}{n}.$$

Ce qui montre que le travail mécanique à développer pour maintenir le corps P à une certaine hauteur dans l'air est d'autant moindre que le fractionnement de la seconde est plus grand.

Dans le cas où n serait égal à l'infini, c'est-à-dire dans le cas où il n'y aurait pas de chute, l'homme ou l'appareil se relevant à chaque instant, le travail par seconde serait complètement nul, assertion qui, tout en paraissant paradoxale, est en réalité parfaitement exacte et susceptible d'une démonstration rigoureuse et, d'ailleurs, complètement en harmonie avec les grandes lois de la *mécanique rationnelle* qui n'admettent pas qu'il y ait travail là où il n'y a pas déplacement du point d'application de la force.

Les corps tombant dans l'air bien moins vite que dans le vide, surtout lorsqu'ils présentent une large surface hori-

zontale, il est bien évident que le raisonnement précédent s'applique, à plus forte raison, dans ce dernier cas.

Il n'est donc pas exact de dire que l'homme ne peut, par sa seule puissance musculaire, contrebalancer l'influence de la pesanteur. Cela ne saurait être vrai que si, avant de se relever, il s'abandonnait trop longtemps à l'action incessante de l'attraction terrestre.

Nous avons déjà montré, d'ailleurs, que, contrairement à l'opinion régnante, la prise du point d'appui dans l'air ne nécessite pas le moindre développement de travail mécanique; en d'autres termes, que la prise du point d'appui dans l'air est complètement gratuite.

VII

Autre démonstration du principe que le travail mécanique, pour se maintenir à une hauteur moyenne dans l'air, diminue quand le nombre de battements par seconde augmente.

Nous venons d'établir, en partant de la formule

$$e = \frac{1}{2} gt^2$$

qui donne les lois de la chute des corps dans le vide, que le *travail mécanique* à développer pour se maintenir à une certaine hauteur moyenne dans l'air est, pour un volateur quelconque, et en appliquant cette formule, d'autant plus faible que le nombre de battements d'ailes, par seconde, est plus considérable.

Or, la formule

$$e = \frac{1}{2} gt^2$$

donne nécessairement pour la chute des corps pendant un temps quelconque un espace beaucoup plus grand que la réalité ne le comporte, en raison de ce fait que la résistance de l'air contrarie la chute et diminue l'espace parcouru pendant un temps donné.

Les conditions, dans ce dernier cas, étant en réalité plus favorables que dans le premier, c'est-à-dire dans le cas où la chute aurait lieu dans le vide, on pourrait, dès à présent, admettre comme définitivement démontré, d'une manière générale, que :

Le travail mécanique à développer pour se maintenir à une certaine hauteur dans l'air diminue d'autant plus que le nombre de battements d'ailes par seconde est plus considérable.

Malgré cela, et pour ne laisser aucun doute dans l'esprit, nous allons établir la même vérité en partant des formules qui donnent les lois définitives de la chute d'un plan mince, tombant librement dans l'atmosphère, quand ce plan est

constamment horizontal et que l'on tient compte de la résistance que l'air oppose à la chute.

Pour cela faire, rappelons que la formule qui nous donne l'espace parcouru verticalement par un plan mince horizontal tombant librement, a été établie précédemment et s'exprime par

$$x = \frac{K_1^2}{g} L \frac{e^{\frac{2gt}{K_1}} + 1}{2e^{\frac{gt}{K_1}}},$$

dans laquelle x représente l'espace parcouru, g l'intensité de la pesanteur, e la base des logarithmes népériens, t le temps de la chute et K_1 un certain coefficient.

Soit maintenant n le nombre de chutes par seconde : la durée d'une chute sera alors représentée par

$$t = \frac{1}{n}.$$

L'espace parcouru pendant ce temps s'exprimera, par suite, par

$$h = \frac{K_1^2}{g} L \frac{e^{\frac{2g}{nK_1}} + 1}{2e^{\frac{g}{nK_1}}},$$

et, si P est le poids de l appareil, le travail à développer pour ramener cet appareil à sa première hauteur, après chaque chute, sera, nécessairement,

$$Ph = \frac{K_1^2 P}{g} L \frac{e^{\frac{2g}{nK_1}} + 1}{2e^{\frac{g}{nK_1}}}.$$

Mais il y a n chutes par seconde et, par conséquent, n relèvements. Le travail total à développer par seconde sera donc

$$T = nPh = \frac{K_1^2 nP}{g} L \frac{e^{\frac{2g}{nK_1}} + 1}{2e^{\frac{g}{nK_1}}}.$$

Or, au fur et à mesure que n devient grand, l'exposant

$$\frac{2g}{nK_1}$$

devient plus petit, puisque le dénominateur devient plus grand sans que le numérateur change.

L'expression

$$e^{\frac{2g}{nK_1}}$$

tend donc vers l'unité, puisque l'exposant de e tend vers zéro.

Il en est de même, évidemment, de

$$e^{\frac{g}{nK_1}}$$

Par suite, l'expression

$$\frac{e^{\frac{2g}{nK_1}}+1}{2e^{\frac{g}{nK_1}}}$$

tend vers $\frac{2}{2}$ ou l'unité

Et comme L1 = O, on voit clairement que, au fur et à mesure que n devient grand, l'expression

$$L\frac{e^{\frac{2g}{nK_1}}+1}{2e^{\frac{g}{nK_1}}}$$

tend vers zéro.

Il en est de même, par conséquent, de

$$\frac{K_1^2\, n\, P}{g} L\frac{e^{\frac{2g}{nK_1}}+1}{2e^{\frac{g}{nK_1}}},$$

puisqu'un produit tend nécessairement vers zéro quand un de ses facteurs tend vers zéro, quand même d'ailleurs l'autre facteur deviendrait très grand, pourvu qu'il reste fini.

Mais cette expression représente précisément le travail T qu'il faut développer pour se maintenir à une hauteur moyenne dans l'air quand le nombre de chutes par seconde est représenté par n.

Il résulte de là, évidemment, d'une manière tout à fait générale, que :

Le travail mécanique à développer par seconde pour se maintenir à une hauteur moyenne dans l'atmosphère diminue d'autant plus, toutes choses égales, d'ailleurs, *que le nombre de battements d'ailes par seconde devient plus considérable.*

Chez la plupart des insectes, le nombre de battements d'ailes par seconde est extrêmement élevé.

Chez la mouche, par exemple, ce nombre de battements est de 330 par seconde, soit, par minute, 19,800.

On voit, par ce qui précède, qu'il ne faut pas conclure de ce nombre considérable de battements d'ailes par seconde que la mouche, pour se maintenir à une certaine hauteur dans l'atmosphère, développe, toutes choses égales, d'ailleurs, un travail mécanique considérable.

C'est justement tout le contraire.

VIII

Erreur des mathématiciens qui, pour calculer le travail relatif à la prise du point d'appui, multiplient le poids par la vitesse correspondant à une résistance de l'air équivalente à ce poids.

Les mathématiciens qui ont essayé de déterminer par le calcul la quantité de force motrice ou de travail mécanique qu'il faut développer pour maintenir à une hauteur constante dans l'air un corps de poids P ont, généralement, raisonné de cette manière :

Supposons que le corps de poids P, qu'il s'agit d'élever ou de maintenir à une certaine hauteur dans l'air, présente une surface plane, ou du moins une surface de projection sur un plan horizontal, de superficie égale à S, S étant exprimée en mètres carrés.

Le corps, abandonné à lui-même dans l'atmosphère, doit nécessairement tomber ; mais dans sa chute il éprouve, de la part de l'air, une certaine résistance que l'on représente habituellement par

(1) $$R = K m S V^2,$$

m désignant la masse d'un mètre cube d'air ou le nombre 0,13, V la vitesse de chute à l'instant considéré, et K un coefficient variable, dépendant de diverses circonstances, et notamment de la forme et de l'étendue de la surface S.

Le mouvement étant nécessairement accéléré, en raison de l'action incessante de la pesanteur, il arrivera, évidemment, un moment où, la résistance de l'air augmentant en raison de l'accroissement de la vitesse V, cette résistance sera égale à P, et où l'on aura

(2) $$K m S V^2 = P.$$

La résistance de l'air, agissant en sens contraire de la pesanteur, le corps, à partir de cet instant, ne tombera plus qu'en vertu de la vitesse acquise et le mouvement deviendra uniforme.

Le travail développé par le poids P, pendant une seconde de chute, sera alors PV.

Or, il est évident, ajoutent nos mathématiciens, que pour maintenir le corps P à une hauteur constante dans l'air, il faut développer, par seconde, un travail mécanique en sens contraire, exactement égal à celui qui est développé par la pesanteur pendant le même temps.

Mais de l'égalité (2) on déduit :

$$V = \sqrt{\frac{P}{K m S}}.$$

Donc, le travail à développer par seconde, pour maintenir à une certaine hauteur, dans l'air, un corps de poids P, peut s'exprimer par

$$T = PV = P\sqrt{\frac{P}{K m S}},$$

ou, sous une autre forme, par

$$(3) \qquad T = \sqrt{\frac{P^3}{K m S}},$$

formule qui, évidemment, conduit à des chiffres fantastiques pour l'expression du travail mécanique qu'il est nécessaire de développer, par seconde, pour maintenir, à une certaine hauteur dans l'air, un poids de quelque importance.

C'est en raisonnant de cette manière que Henry Giffard a conclu de ses calculs que, pour prendre son point d'appui dans l'air au moyen de l'hélice, l'homme a besoin d'une force motrice supplémentaire de cinq ou six chevaux-vapeur.

C'est de cette manière aussi que raisonne le commandant Renard au début du travail, d'ailleurs très soigné, qu'il a publié dans la *Revue aéronautique*.

Mais il faut bien remarquer que cette manière de raisonner est absolument inexacte.

Lorsqu'un corps de poids P et de surface S tombe librement dans l'air et se précipite vers la surface de la terre, sa chute présente, en effet, deux périodes bien distinctes :

L'une, dans laquelle le mouvement est très rapidement accéléré avec une vitesse nulle au départ ;

L'autre, dans laquelle le mouvement est uniforme avec la vitesse correspondante à la fin de la première période.

Or, pourquoi attendre, pour commencer à relever le corps P, qu'il soit tombé pendant un temps plus ou moins long et qu'il ait acquis son maximum de vitesse ?

Pourquoi ne pas commencer à le relever au moment où il commence à tomber ?

Mais si l'on opère de cette façon, c'est-à-dire si l'on relève le corps à chaque instant et, par suite, au commencement de la première période de chute, période dans laquelle le mouvement est accéléré et la vitesse variable, en partant de zéro, quelqu'un pourra-t-il bien me dire quelle est la doctrine scientifique qui permet d'écrire que le travail mécanique développé par le poids P, et qu'il s'agit de neutraliser au moyen d'un moteur artificiel, peut, alors, être exprimé par

$$P V,$$

V représentant ici la vitesse finale que le corps P peut acquérir quand il tombe librement pendant un temps indéterminé ?

Pareille doctrine n'est, évidemment, pas soutenable, car tous ceux qui ont des notions sérieuses de mécanique rationnelle savent très bien que, dans le mouvement varié produit par une force constante, le travail mécanique s'obtient en multipliant la force par le chemin parcouru dans le sens de cette force, et n'est nullement exprimé par le produit de la force par la vitesse maximum que le mobile peut acquérir.

Je n'ai aucune peine à reconnaître d'ailleurs que, pendant un certain temps, je suis tombé dans la même erreur que Giffard, le commandant Renard et tant d'autres avec eux ; mais une étude plus approfondie de la question m'a fait assez aisément comprendre qu'une pareille doctrine est radicalement fausse et complètement absurde.

IX

La navigation mécanique aérienne, dans le système dit de l'AÉROPLANE, est toujours possible avec les moteurs actuellement usités dans l'Industrie.

L'on a fait dernièrement grand bruit autour d'un mémoire de quelques lignes que M. Langley, astronome distingué de Washington, a présenté à l'Académie des Sciences et dans lequel ce savant fait connaître les résultats d'une série d'expériences qu'il a faites sur la résistance au mouvement que les plans minces rencontrent dans l'air.

Les conclusions du mémoire de M. Langley sont, de fait, assez remarquables et méritent qu'on s'y arrête. Les voici :

1° « La force requise pour soutenir des plans inclinés dans une locomotion horizontale aérienne diminue », dit M. Langley, « au lieu de croître, quand la vitesse augmente, et cela jusqu'à de très grandes vitesses ».

2° « Le travail nécessaire pour soutenir à grande vitesse le poids d'un appareil composé de plans et d'un moteur », dit encore M. Langley, « peut être produit par des moteurs aussi légers que ceux que l'on construit actuellement, pourvu qu'on puisse diriger convenablement l'appareil dans le vol libre ».

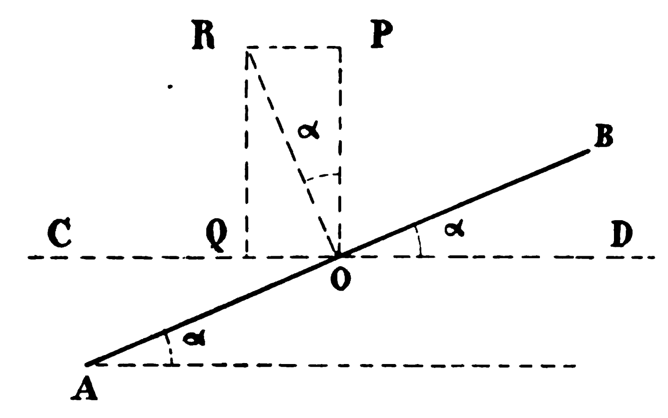
Ces conclusions, je le répète, sont extrêmement remarquables ; mais, cela soit dit sans que je songe à diminuer en rien le mérite du savant distingué qui les a déduites d'expériences continuées avec persévérance pendant quatre années, il est très aisé d'arriver à ces mêmes conclusions par un calcul très simple que j'ai exposé à diverses reprises dans mes communications hebdomadaires à *l'Ecole supérieure de navigation aérienne* et ailleurs, bien longtemps avant que M. Langley n'eût présenté son mémoire à l'Académie des sciences.

Je reproduirai ici la démonstration analytique très simple des conclusions qui terminent le mémoire de M. Langley et qui doivent être la base de toutes les recherches sérieuses

qui ont trait à l'important problème de la navigation aérienne proprement dite.

Les considérations que je vais présenter démontrent de la manière la plus rigoureuse que la navigation mécanique aérienne par l'aéroplane est toujours possible et facilement réalisable avec les moteurs actuellement connus, ce que les expériences faites par M. Langley paraissent également indiquer de la manière la plus sérieuse.

Soit, en effet, le plan incliné A B, se mouvant dans la



direction C D avec une vitesse V; désignons par α l'angle d'inclinaison du plan avec l'horizon, et par S la surface de ce plan, par P son poids.

D'après les lois aujourd'hui connues de la résistance des fluides, la résistance, R, que ce plan éprouve de la part de l'air, sera exprimée par

(1) $$R = K m S \sin \alpha V^2,$$

m représentant, dans cette formule, la masse d'un mètre cube d'air, ou le nombre 0,13, qui provient de la division du poids d'un mètre cube d'air, 1 k. 300 par l'intensité de la pesanteur, ou le nombre 9,8088, et K un coefficient constant pour chaque surface.

Or cette résistance R est normale au plan AB et peut se décomposer en deux : une force verticale P, égale au poids du plan, et une force horizontale Q, représentant, en kilogrammes, l'effort qu'il faut faire pour maintenir le plan en mouvement avec une vitesse V.

Il est facile de voir que la composante P est égale à

$R\cos\alpha$, ou bien, en remplaçant R par la valeur trouvée plus haut, (1), à $KmS\sin\alpha\cos\alpha V^2$, de sorte que l'on a

(2) $$P = KmS\sin\alpha\cos\alpha V^2.$$

On aura de même, pour la composante Q,

$$Q = R\sin\alpha,$$

ou bien, en remplaçant R par sa valeur exprimée plus haut,

(3) $$Q = KmS\sin^2\alpha V^2.$$

Cette dernière expression montre, évidemment, que l'effort Q, qu'il faut faire pour maintenir le poids P en suspension dans l'atmosphère, est d'autant moindre que l'angle d'inclinaison est plus petit.

Comme d'ailleurs l'angle d'inclinaison α ne saurait devenir plus petit sans que la vitesse V augmente, étant admis que le poids P et la surface S restent les mêmes, on voit aisément que l'effort Q diminue quand la vitesse V augmente. C'est la première des conclusions du mémoire de M. Langley.

Il est à remarquer toutefois que cette seconde manière de présenter une loi générale très simple est moins intelligible que la première.

Au premier abord on ne comprend pas, en effet, que le produit Q diminue alors que l'un de ses facteurs augmente. Le fait ne s'explique qu'en considérant que $\sin^2\alpha$, l'un des autres facteurs de Q, diminue plus rapidement que V n'augmente et $\sin^2\alpha$ diminue en même temps que l'angle d'inclinaison α.

Examinons, au surplus, le travail mécanique qu'il faut développer pour maintenir à la même hauteur dans l'air le plan incliné qui nous occupe.

Il est évident, d'abord, que la force P ne donne lieu à aucun développement de travail mécanique, et cela tout simplement parce qu'elle est perpendiculaire à la direction du mouvement et qu'il n'y a pas de déplacement, dans la direction de la force, du point d'application de cette force.

Quant à la force Q, elle donnera lieu nécessairement à un travail mécanique qui sera représenté par

$$Q \times V \quad \text{ou} \quad KmS\sin^2\alpha V^3,$$

de sorte que l'on aura

(4) $$T = KmS\sin^2\alpha V^3.$$

Or, cette équation prouve également que le travail T

diminue quand l'angle α devient plus petit, et, par conséquent, quand la vitesse V augmente, pourvu qu'en même temps l'angle d'inclinaison α devienne suffisamment petit. C'est, sous une autre forme, la première des conclusions du mémoire de M. Langley.

Reprenons maintenant les expressions (2) et (4) que nous avons données tout à l'heure.

Nous avons les deux équations simultanées :

$$P = KmS \sin\alpha \cos\alpha V^2,$$
$$T = KmS \sin^2\alpha V^3.$$

Or, nous connaissons P : c'est le poids à soulever et qu'il s'agit de maintenir constamment à une certaine hauteur dans l'air ; nous connaissons également m : c'est le nombre 0,13, représentant la masse d'un mètre cube d'air ; nous connaissons encore la surface S, puisque nous pouvons prendre cette surface arbitrairement ; nous connaissons enfin T, puisque c'est le nombre de kilogrammètres que peut développer par seconde le moteur dont nous disposons, quel que soit d'ailleurs ce moteur.

Par suite, les deux équations ci-dessus ne renferment plus que deux inconnues α et V.

Il est d'ailleurs aisé de voir que ces deux équations, transcendantes, sont toujours résolubles.

De là on déduit nécessairement que, quelle que soit la puissance T du moteur que nous voulons utiliser, il est toujours possible, avec ce moteur, de maintenir à n'importe quelle hauteur dans l'air, au moyen d'un aéroplane de surface S, un corps quelconque du poids total P, quel que soit ce poids.

Ce qui démontre, avec la dernière évidence, et de la manière la plus rigoureuse, que la navigation mécanique aérienne au moyen de l'aéroplane est toujours possible quel que soit le moteur dont on dispose et quel que soit le poids que l'on désire enlever.

C'est ce qu'exprime également M. Langley, quoique d'une manière moins catégorique, par la deuxième conclusion qui termine son Mémoire.

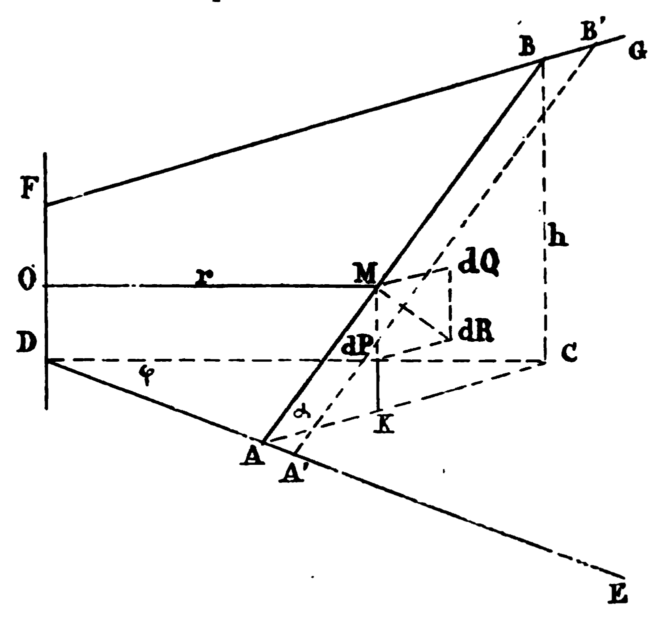
Plus loin, je montrerai que l'important problème de la navigation aérienne peut se résoudre avec la même facilité par l'emploi de l'hélice, comme aussi en faisant usage d'un ou plusieurs systèmes d'ailes battantes.

X

La navigation mécanique aérienne, dans le système dit de l'HÉLICOPTÈRE, est toujours possible avec les moteurs actuellement usités dans l'Industrie.

Parmi les divers organes que l'on préconise pour s'élever dans l'air, l'hélice trapézoïdale tient incontestablement l'une des premières places. Toutefois l'opinion générale à cet égard est que, pour mettre en mouvement une hélice capable d'élever et de maintenir dans l'air un poids donné, les moteurs actuellement connus et usités dans l'industrie sont complètement insuffisants.

Nous allons montrer, dans ce paragraphe, que c'est là une grave erreur, et que, quel que soit le poids à élever et à maintenir dans l'air, tous les moteurs actuellement usités dans l'industrie sont largement suffisants pour atteindre le but désiré ; par suite, la possibilité du problème, pour un poids et un moteur donnés, ne dépend que du pas et de la vitesse de rotation que l'on donne à l'hélice.



Soient AB et A' B' deux positions infiniment voisines de la droite qui, en glissant sur les droites DE et FG, situées dans deux plans parallèles perpendiculaires en D et F à l'axe DF, mais non parallèles elles-mêmes, engendre la surface gauche représentant l'une des branches de l'hélice trapézoïdale considérée. Soit φ l'angle des deux plans ADF et BFD; — nous admettons que les distances AD, BF sont constamment égales. — Désignons par α l'angle BAC formé par AB avec sa projection sur le plan CDE perpendiculaire à DF. Soit M le point milieu de AB. Désignons par r le rayon OM, lequel est, évidemment, perpendiculaire à AB; soit encore ω la vitesse de rotation de l'hélice; la vitesse tangentielle du point M sera ωr.

Si nous désignons AB par l, l'élément de surface AB A' B', qui est l'élément différentiel, et peut être représenté par dS, sera évidemment égal à $l\,dr$, l'élément différentiel du rayon r étant représenté par dr; en sorte que l'on aura

$$(1) \qquad dS = l\,dr.$$

Or dS ou AB A' B' peut être considéré à chaque instant, au point de vue de la résistance qu'il éprouve de la part de l'air, comme un plan incliné se mouvant avec la vitesse ωr. D'après des formules connues l'élément de résistance, que l'on peut considérer comme agissant en M, sera exprimé par

$$dR = K_1 m\,l\,dr\,\omega^2 r^2 \sin\alpha,$$

K_1 représentant toujours un coefficient constant.

Cet élément de résistance se décompose, évidemment, en deux, comme dans le cas de l'aéroplane, en sorte que l'on a

$$(2) \qquad dQ = K_1 m\,l\,dr\,\omega^2 r^2 \sin^2\alpha$$

$$(3) \qquad dP = K_1 m\,l\,dr\,\omega^2 r^2 \sin\alpha \cos\alpha.$$

D'un autre côté, l'élément différentiel du travail mécanique à développer pour mettre la branche d'hélice en mouvement s'exprimera par

$$(4) \qquad dT = K_1 m l dr\,\omega^3 r^3 \sin^2\alpha.$$

En réalité, on arrive aux deux formules

$$dP = K_1 m\,l\,\omega^2 r^2 \sin\alpha \cos\alpha\,dr$$
$$dT = K_1 m\,l\,\omega^3 r^3 \sin^2\alpha\,dr,$$

lesquelles, en intégrant, donnent

(5) $$P = K_1 m \omega^2 \int_{r_1}^{r_2} l r^2 \sin\alpha \cos\alpha \, dr,$$

(6) $$T = K_1 m \omega^2 \int_{r_1}^{r_2} l r^2 \sin^2\alpha \, dr,$$

en désignant par r_1 et r_2 les rayons médians extrêmes.

Il s'agit, maintenant, d'arriver à l'intégration.

Pour cela, remarquons que

$$\text{Sin}\,\alpha = \frac{h}{l} \qquad \text{Cos}\,\alpha = \frac{AC}{l}.$$

Mais

$$AC = 2AK = 2r\frac{AK}{r} = 2r\,tg\frac{\varphi}{2},$$

tandis que

$$l = \sqrt{h^2 + 4r^2 tg^2\frac{\varphi}{2}}.$$

On aura donc

$$\sin\alpha = \frac{h}{\sqrt{h^2 + 4r^2 tg^2\frac{\varphi}{2}}} \qquad \cos\alpha = \frac{2r\,tg\frac{\varphi}{2}}{\sqrt{h^2 + 4r^2 tg^2\frac{\varphi}{2}}}.$$

Remplaçant dans (5) et (6) sin α et cos α par leur valeur, il vient, successivement,

$$P = K_1 m \omega^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{l r^2 \frac{h}{l}\, 2r\,tg\frac{\varphi}{2}\, dr}{l}$$

$$T = K_1 m \omega^2 \int_{r_1}^{r_2} l r^2 \frac{h^2}{l^2}\, dr$$

ou

$$P = K_1 m \omega^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{2hr^3\,tg\frac{\varphi}{2}\, dr}{l}$$

$$T = K_1 m \omega^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{h^2 r^2\, dr}{l}.$$

Et, par suite,

(7) $$P = 2K_1 m h \omega^2 tg\frac{\varphi}{2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^3\, dr}{\sqrt{h^2 + 4r^2 tg^2\frac{\varphi}{2}}}$$

(8) $$T = K m h^2 \omega^3 \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^3 dr}{\sqrt{h^2 + 4r^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}}}.$$

Or, l'intégrale

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{r^3 dr}{\sqrt{h^2 + 4r^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

ne dépend que des rayons médians extrêmes et du pas h de l'hélice.

Comme r_1, r_2 et φ sont des quantités fixées arbitrairement, il en résulte que l'intégrale est une fonction de h que nous représenterons par $f(h)$.

On aura, par suite,

(9) $$P = 2 K_1 m \omega^2 h tg \frac{\varphi}{2} f(h)$$

(10) $$T = K_1 m h^2 \omega^3 f(h).$$

Or, dans ces deux équations, P et T représentent respectivement le poids que chaque branche d'hélice doit supporter et la puissance motrice dont on dispose pour mettre cette branche en mouvement ; ce sont, par conséquent, des quantités connues. Il ne reste, comme inconnues, que h et ω, et les deux équations sont toujours résolubles par rapport à ces deux variables.

Donc, quels que soient P et T, le problème de la navigation aérienne au moyen de l'hélice trapézoïdale est toujours résoluble.

Cette solution était à prévoir, d'ailleurs, puisque le problème est toujours résoluble au moyen de l'aéroplane et que l'hélice n'est autre chose qu'un aéroplane tournant.

Nous reviendrons sur ces questions à propos de

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{r^3 dr}{\sqrt{h^2 + 4r^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}}}$$

qui est l'intégrale d'une différentielle binôme et que l'on sait déterminer.

XI

Intégration des équations différentielles fondamentales qui établissent que, dans le système de l'HÉLICOPTÈRE, la navigation mécanique aérienne est toujours possible avec les moteurs actuellement usités dans l'industrie.

Dans le précédent paragraphe nous avons été conduit aux deux équations fondamentales

$$\text{(A)} \qquad P = 2K_1 m \omega^2 h \, tg\frac{\varphi}{2} \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^3}{\sqrt{h^2 + 4r^2 tg^2\frac{\varphi}{2}}} dr$$

$$\text{(B)} \qquad T = K_1 m \omega^3 h^2 \int_{r_1}^{r_2} \frac{r^3}{\sqrt{h^2 + 4r^2 tg^2\frac{\varphi}{2}}} dr$$

qui établissent, d'une manière irréfutable, la possibilité d'élever et de maintenir dans l'air, au moyen d'une hélice, un poids quelconque n P, quelle que soit d'ailleurs la puissance n T du moteur dont on dispose, n représentant dans ce cas le nombre de branches de l'hélice.

Ces deux équations renferment une intégrale commune

$$\int_{r_1}^{r_2} \frac{r^3 dr}{\sqrt{h^2 + 4r^2 tg^2\frac{\varphi}{2}}}$$

que nous allons calculer.

Remarquons d'abord, pour cela faire, que

$$\frac{r^3 dr}{\sqrt{h^2 + 4r^2 tg^2\frac{\varphi}{2}}}$$

est une différentielle binôme toujours intégrable.

On a d'ailleurs successivement :

$$\int \frac{r^3 dr}{\sqrt{h^2 + 4r^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}}} = \int r^3 \left(h^2 + 4r^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr$$

$$\int r^3 \left(h^2 + 4r^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr = \int \frac{r^2 d\left(h^2 + 4r^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{\frac{1}{2} \times 2 \times 4 r tg^2 \frac{\varphi}{2}}$$

$$\int r^3 \left(h^2 + 4r^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}\right)^{-\frac{1}{2}} dr$$
$$= \frac{1}{4 tg^2 \frac{\varphi}{2}} \int r^2 d \left(h^2 + 4r^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{2}},$$

et, par suite,

$$(1) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int \frac{r^3 dr}{\sqrt{h^2 + 4r^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}}} \\ &= \frac{1}{4 tg^2 \frac{\varphi}{2}} \int r^2 d \left(h^2 + 4r^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \right.$$

Mais

$$\int r^2 d \left(h^2 + 4r^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}$$
$$= r^2 \left(h^2 + 4r^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} - 2 \int r \left(h^2 + 4r^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} dr.$$

Donc, en portant dans (1)

$$(2) \quad \left\{ \begin{aligned} &\int \frac{r^3 dr}{\sqrt{h^2 + 4r^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}}} \\ &= \frac{r^2 \left(h^2 + 4r^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}\right)}{4 tg^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{1}{2 tg^2 \frac{\varphi}{2}} \int r \left(h^2 + 4r^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{2}} dr, \end{aligned} \right.$$

nous avons ensuite

$$\int r\left(h^2+4r^2 tg^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}dr=\frac{1}{2}\int\left(h^2+4r^2 tg^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}d.r^2,$$

ou, encore,

$$\int r\left(h^2+4r^2 tg^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}dr$$

$$=\frac{1}{2}\times\frac{1}{4tg^2\frac{\varphi}{2}}\int\left(h^2+4r^2 tg^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}d\left(h^2+4r^2 tg^2\frac{\varphi}{2}\right).$$

et, par suite,

$$\int r\left(h^2+4r^2 tg^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}dr=\frac{2}{3}\,\frac{\left(h^2+4r^2 tg^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{8tg^2\frac{\varphi}{2}},$$

ou, en réduisant,

$$(3)\qquad \int r\left(h^2+4r^2 tg^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}dr=\frac{\left(h^2+4r^2 tg^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{12tg^2\frac{\varphi}{2}}.$$

Transportant dans (2), on aura

$$(4)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int\frac{r^3\,dr}{\sqrt{h^2+4r^2 tg^2\frac{\varphi}{2}}}\\&=\frac{r^2\left(h^2+4r^2 tg^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{1}{2}}}{4tg^2\frac{\varphi}{2}}-\frac{\left(h^2+4r^2 tg^2\frac{\varphi}{2}\right)^{\frac{3}{2}}}{24tg^4\frac{\varphi}{2}}\end{aligned}\right.$$

Par suite

$$(5)\qquad \left\{\begin{aligned}&\int_{r_1}^{r_2}\frac{r^3\,dr}{\sqrt{h^2+4r^2 tg^2\frac{\varphi}{2}}}\\&=\frac{r_2^2\sqrt{h^2+4r_2^2 tg^2\frac{\varphi}{2}}-r_1^2\sqrt{h^2+4r_1^2 tg^2\frac{\varphi}{2}}}{4tg^2\frac{\varphi}{2}}\\&-\frac{\sqrt{\left(h^2+4r_2^2 tg^2\frac{\varphi}{2}\right)^3}-\sqrt{\left(h^2+4r_1^2 tg^2\frac{\varphi}{2}\right)^3}}{24tg^2\frac{\varphi}{2}}.\end{aligned}\right.$$

Les deux équations définitives qui forment la base de la théorie de la navigation mécanique aérienne au moyen de l'hélice trapézoïdale sont donc

$$(C)\quad \left\{ P = \frac{K_1 m \omega^2 h}{2 tg \frac{\varphi}{2}} \left[r_2^2 \sqrt{h^2 + 4 r_2^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}} - r_1^2 \sqrt{h^2 + 4 r_1^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{\sqrt{\left(h^2 + 4 r_2^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}\right)^3} - \sqrt{\left(h^2 + 4 r_1^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}\right)^3}}{6 tg^2 \frac{\varphi}{2}} \right], \right.$$

$$(D)\quad \left\{ T = \frac{K_1 m \omega^3 h^2}{4 tg^2 \frac{\varphi}{2}} \left[r_2^2 \sqrt{h^2 + r_2^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}} - r_1^2 \sqrt{h^2 + 4 r_1^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}} - \frac{\sqrt{\left(h^2 + 4 r_2^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}\right)^3} - \sqrt{\left(h^2 + 4 r_1^2 tg^2 \frac{\varphi}{2}\right)^3}}{6 tg^2 \frac{\varphi}{2}} \right], \right.$$

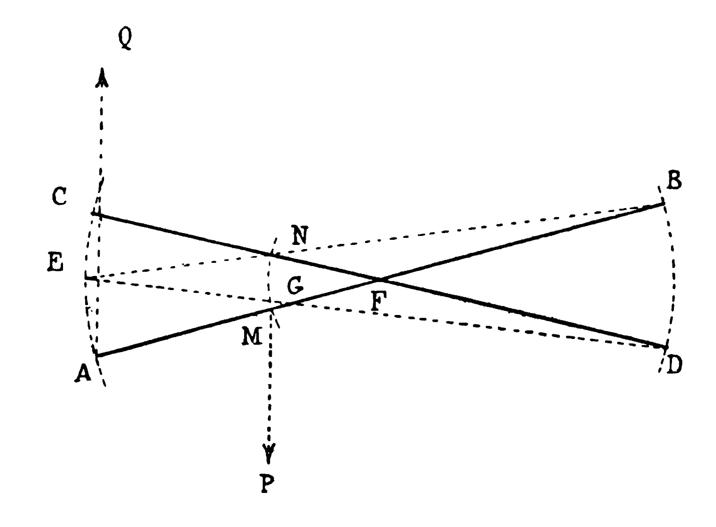
dans lesquelles P, T, m, φ, r_1 et r_2, sont des quantités données ou que l'on peut prendre arbitrairemnt et ω, h, les quantités inconnues. — Ces équations étant tojours résolubles, quels que soient le poids P à soulever et la puissance T du moteur, *le problème de la navigation mécanique aérienne au moyen de l'hélice est toujours résoluble avec les moteurs actuellement ustiés dans l'industrie.*

Il est à remarquer que P et T sont relatifs à une seule branche de l'hélice. Si l'hélice a n branches, le poids total est nécessairement représenté par n P pendant que la puissance motrice se trouve à son tour représentée par n T ; mais cela ne change évidemment rien à notre démonstration.

XII

La navigation mécanique aérienne dans le système dit de l'ORTHOPTÈRE ou à ailes est toujours possible avec les moteurs actuellement usités dans l'Industrie.

Dans un des paragraphes précédents j'ai établi que, si M est le point d'attache de l'aile, D son centre de résistance



et A le point d'application de la puissance motrice, le travail élémentaire de l'aile se trouve représenté, à un infiniment petit du deuxième ordre près, par

$$A E \times Q \qquad \text{ou, encore, par } M N \times P,$$

le poids total étant représenté par 2 P et se répartissant sur les deux ailes.

Si l'on représente les distances parcourues dans le sens vertical par x, ce travail élémentaire, pour une aile, sera exprimé par $P\,dx$, et, pour les deux ailes, par

$$dT = 2\,P\,dx.$$

Le travail, par battement descendant, sera, par suite,

$$T = \int_{x_1}^{x_2} 2P dx, \qquad \text{ou} \qquad T = 2P(x_2 - x_1),$$

en représentant par x_1 et x_2 les hauteurs extrêmes de l'un des points au commencement et à la fin du battement.

De cette équation on déduit, pour la hauteur à laquelle on s'élève par chaque battement descendant,

$$x_2 - x_1 = \frac{T}{2P}.$$

Ce qui montre que, quelle que soit la puissance motrice dont on dispose pour un temps quelconque, et par conséquent pour un battement descendant, on peut toujours, au moyen d'un coup d'ailes, soulever un poids quelconque 2 P.

Bien entendu la hauteur de soulèvement est d'autant moindre que T est plus petit et 2 P plus grand; mais, enfin, le soulèvement est toujours possible.

Remarquons, maintenant, que la chute pendant le temps t, considéré à partir du moment où, les ailes se relevant, n'agissent plus pour soulever le corps, est, tout au plus, égale à

$$e = \frac{1}{2} g t^2,$$

g désignant l'intensité de la pesanteur et e la hauteur de la chute.

De là il est facile de déduire que l'appareil se maintiendra, montera ou descendra selon que l'on aura

$$\frac{1}{2} g t^2 = \frac{T}{2P}, \qquad \frac{1}{2} g t^2 < \frac{T}{2P}, \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2} g t^2 > \frac{T}{2P}.$$

Ce qui revient à dire que l'appareil se maintiendra, montera ou descendra selon que l'on aura

$$t = \sqrt{\frac{T}{Pg}}, \qquad t < \sqrt{\frac{T}{Pg}}, \qquad \text{ou} \qquad t > \sqrt{\frac{T}{Pg}}.$$

La durée du battement descendant restant la même, le maintien à la même hauteur, la montée ou la descente de l'appareil pendant un battement complet ne dépendent donc absolument que de la quantité t, c'est-à-dire de la

durée du battement ascendant, durée dont on peut, évidemment, disposer.

Dans tous les cas, les considérations qui précèdent démontrent clairement que, quelle que soit la puissance motrice dont on dispose pour réaliser une série de battements descendants, la solution du problème de la navigation aérienne est toujours possible au moyen d'un seul système d'ailes.

On comprend aisément qu'il en est absolument de même, à plus forte raison, si l'on emploie deux systèmes d'ailes dont l'un réalise le battement descendant pendant que l'autre réalise le battement ascendant et *vice versa.*

Donc, *avec les moteurs actuels, et en employant des ailes, le problème de la navigation aérienne mécanique est toujours possible.*

Il est à remarquer ici que T représente la puissance motrice dont on peut disposer par chaque battement, en sorte que, s'il y a *n* battements par seconde, la puissance du moteur se trouve, en réalité, représentée par *n* T.

XIII

Résumé des théories précédentes et application au vélocipède aérien.

La science n'aurait évidemment pas de valeur s'il n'était possible d'en faire des applications réellement utiles. Les articles sur « l'Aviation » que j'ai publiés dans *la Capitale*, et que je viens de rappeler, seraient donc de peu d'importance si la théorie nouvelle et précise que je donne de la navigation aérienne proprement dite n'était susceptible d'une mise en pratique sérieuse. C'est dire qu'en donnant ma théorie j'avais en même temps en vue les combinaisons mécaniques au moyen desquelles on peut la réaliser. C'est de ces combinaisons que je m'occuperai spécialement aujourd'hui. Avant de donner la description des appareils que j'ai conçus, je rappellerai cependant les parties les plus importantes de mes articles précédents.

Les systèmes que l'on considère en aviation se réduisent à trois principaux : le système des aéroplanes qui se basent sur la théorie du cerf-volant ; le système des hélicoptères, lesquels ne sont à vrai dire que des aéroplanes tournants, et le système des ailes battantes, simples ou composées de plusieurs parties, et même souples.

Dans la théorie de l'aéroplane, nous avons été conduit, abstraction faite du coefficient K, aux deux formules suivantes :

$$P = m\,S \sin\alpha \cos\alpha\, V^2 \qquad T = m\,S \sin^2\alpha\, V^3,$$

dans lesquelles m représente la masse d'un mètre cube d'air ou le nombre 0,13; P, le poids total évalué en kilogrammes, destiné à être élevé ou maintenu dans l'air; S, la surface du plan, évaluée en mètres carrés, et que l'on prend arbitrairement; T, la puissance motrice, évaluée en kilogrammètres, ou le moteur dont on dispose; α, l'angle d'inclinaison du plan sur la direction horizontale du mouvement; et V, la vitesse de propulsion dans le sens du mouvement.

Ces équations étant toujours résolubles par rapport à α et V lorsque P, S et T sont connus, il est, évidemment, établi

par là que la navigation mécanique aérienne au moyen de l'aéroplane est toujours possible quel que soit le poids P à transporter, et la force motrice T dont on dispose.

Lorsqu'il s'agit d'un hélicoptère ou aéroplane tournant, on est conduit à deux formules analogues, quoique un peu compliquées, et en faisant encore abstraction de K_1 :

$$P = \frac{m n \omega^2 h}{2\,tg\frac{\varphi}{2}} \left[r_2^2 \sqrt{h^2 + 4 r_2^2 tg^2\frac{\varphi}{2}} - r_1^2 \sqrt{h^2 + 4 r_1^2 tg^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{\sqrt{\left(h^2 + 4 r_2^2 tg^2\frac{\varphi}{2}\right)^3} - \sqrt{\left(h^2 + 4 r_1^2 tg^2\frac{\varphi}{2}\right)^3}}{6\,tg^2\frac{\varphi}{2}} \right]$$

$$T = \frac{m n \omega^3 h^2}{4\,tg^2\frac{\varphi}{2}} \left[r_2^2 \sqrt{h^2 + 4 r_2^2 tg^2\frac{\varphi}{2}} - r_1^2 \sqrt{h^2 + 4 r_1^2 tg^2\frac{\varphi}{2}} - \frac{\sqrt{\left(h^2 + 4 r_2^2 tg^2\frac{\varphi}{2}\right)^3} - \sqrt{\left(h^2 + 4 r_1^2 tg^2\frac{\varphi}{2}\right)^3}}{6\,tg^2\frac{\varphi}{2}} \right]$$

dans lesquelles m représente la masse d'un mètre cube d'air, ou le nombre 0,13 ; n, le nombre de branches d'hélice ; P, le poids total à transporter ; T, la puissance motrice dont on dispose ; ω, la vitesse de rotation de l'hélice ; φ, l'angle d'ouverture de chaque branche ; r_1 et r_2, les rayons médians extrêmes de la branche ; et h, son pas. Mais, ici, P, T, m, n, φ, r_1 et r_2 sont des quantités connues ou que l'on peut prendre arbitrairement. Il est facile de voir d'ailleurs que ces deux équations sont toujours résolubles par rapport à h et à ω dès que les autres quantités sont connues. Il résulte de là que, *quels que soient le poids à soulever et la puissance motrice dont on dispose, le*

problème de la navigation mécanique aérienne au moyen de l'hélicoptère est toujours possible.

Quand on a considéré un système d'ailes, on a vu, d'un autre côté, que, si on désigne par x_1 et x_2 les positions verticales du centre de gravité de l'appareil au commencement et à la fin de chaque battement descendant, le travail, pour n battements par seconde supposés égaux, est

$$T = 2Pn(x_2 - x_1) \qquad \text{d'où} \qquad x_2 - x_1 = \frac{T}{2Pn},$$

tandis que la chute totale pendant les n battements ascendants est

$$E = n\frac{1}{2}gt^2 \qquad \text{d'où} \qquad \frac{E}{n} = \frac{1}{2}gt^2,$$

t désignant évidemment la durée du battement ascendant.

Pour que l'appareil se maintienne à une hauteur moyenne, ou s'élève, il faut, évidemment, que l'on ait

$$\frac{E}{n} \overset{=}{<} x_2 - x_1 \qquad \text{ou} \qquad \frac{1}{2}gt^2 \overset{=}{<} \frac{T}{2Pn},$$

D'où l'on déduit

$$t \overset{=}{<} \sqrt{\frac{T}{Pgn}},$$

condition toujours réalisable. — *La navigation aérienne avec des ailes battantes est donc toujours possible, quels que soient* P *et* T.

Qu'il me soit permis, en outre, de signaler ici le peu d'importance que mérite la distinction établie entre les différents systèmes d'appareils d'aviation : les aéroplanes, les hélicoptères, les orthoptères et tous autres systèmes ayant pour principe de naviguer dans l'air au moyen de surfaces de forme quelconque s'appuyant sur lui en le frappant avec une vitesse plus ou moins grande.

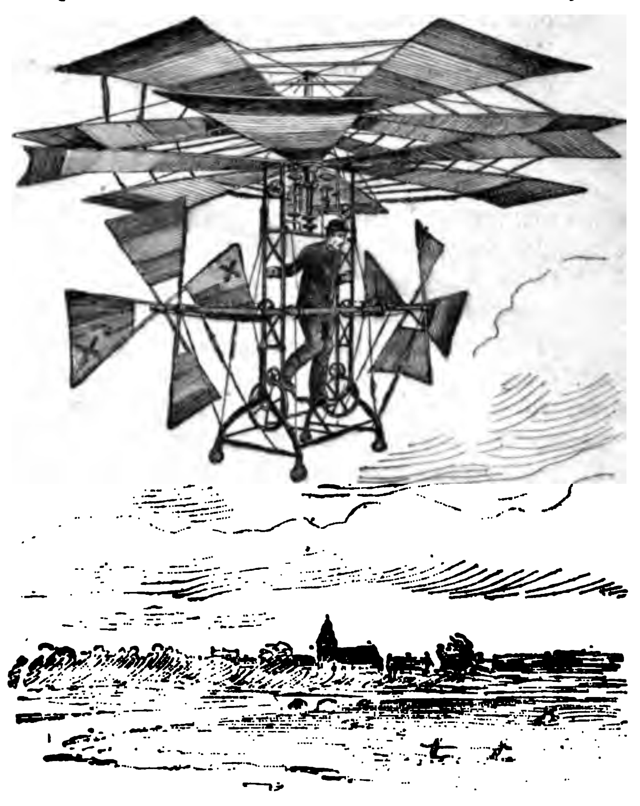
Si l'on remarque que toute surface, quelle qu'elle soit, n'est qu'un composé de surfaces planes, on doit comprendre tout de suite que les appareils d'aviation de n'importe quel système ne sont en définitive que des aéroplanes.

Tous les mathématiciens savent que l'élément d'où l'on part pour faire tous les calculs relatifs aux surfaces est l'élément plan, de même que l'élément d'où l'on part pour établir tous les calculs relatifs aux lignes ne peut être que la ligne droite.

Les physiologistes, qui, après des observations nombreuses, viennent nous dire que l'oiseau est un aéroplane, ne font donc qu'exprimer, au point de vue scientifique, une vérité de la nature de celles énoncées par feu M. de la Palisse. *Tous les appareils volants, naturels ou artificiels*, qui s'élèvent, se maintiennent et naviguent dans l'atmosphère, en utilisant la résistance que les surfaces en mouvement éprouvent de la part de l'air, sont des aéroplanes. La distinction établie entre les différents systèmes d'aviation est donc absolument superficielle.

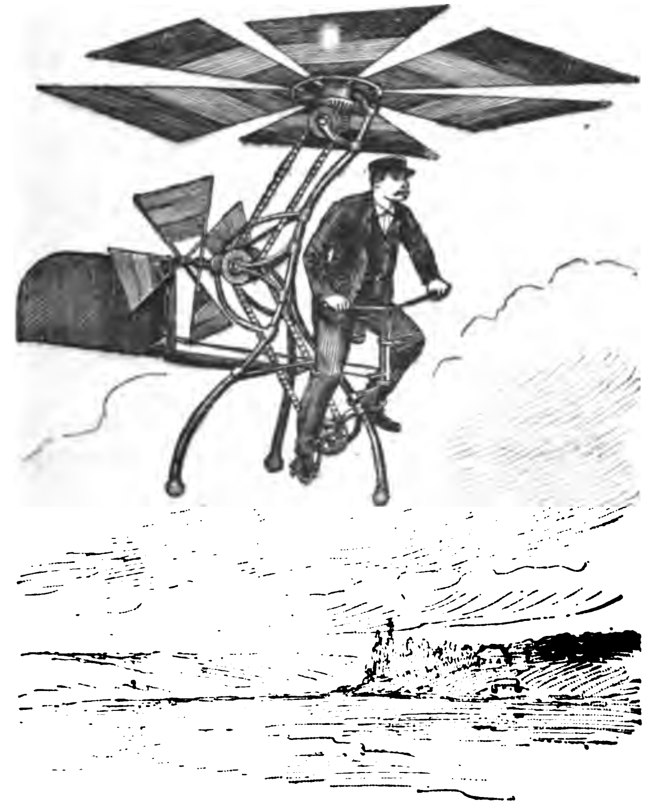
En réalité, *tous les appareils d'aviation sont des aéroplanes, et ne peuvent être que des aéroplanes. Les hélicoptères sont des aéroplanes tournants; les orthoptères, des aéroplanes battants. Leur théorie est la même.*

Le problème de la navigation aérienne étant ainsi résolu théoriquement, dans tous les cas et dans tous les systèmes,



il s'agissait de construire un appareil permettant de le réaliser pratiquement. C'est dans ce but que j'ai imaginé l'appareil représenté ici, lequel se compose : de deux hélices à axe vertical, dites ascensionnelles, et tournant en sens contraire; de deux hélices latérales à axe horizontal, dites de propulsion, et pouvant servir à la direction; et enfin d'un bâti et de transmissions convenables, permettant, au moyen d'un système de pédales, de donner le mouvement aux divers organes de la machine.

Cet appareil, construit en bois, fer et fonte, et par des ouvriers tout à fait inexpérimentés dans ce genre de constructions, ne pouvait que servir de modèle et à faire des études. A ce point de vue il a déjà rendu de grands services



Simplifié et remplacé par le modèle ci-dessus ·eprésenté, qui ne pèse plus que 20 kilos, tandis que dans la première

disposition le poids est de 140 kilos, il constitue la solution définitive du problème de la navigation mécanique aérienne.

Le nouvel appareil se compose, comme on le voit, d'une hélice à axe vertical, dite ascensionnelle; d'une hélice à axe horizontal, dite de propulsion ; d'un long et large gouverneil destiné à donner la direction et par conséquent à corriger le mouvement giratoire que la rotation de l'hélice ascensionnelle tend à imprimer à l'appareil ; d'un bâti en tubes d'acier sur lequel sont fixés les différents organes ; d'un système de pédales analogues aux pédales de la bicyclette ; et d'une chaîne, analogue aux chaînes de vélocipèdes, par l'intermédiaire de laquelle le mouvement est transmis des pédales aux deux hélices.

Le travail mécanique qu'il faut développer, pour donner à l'hélice ascensionnelle une vitesse telle que le point d'appui sur l'air soit assuré, est d'autant plus faible, on le sait, que le pas de cette hélice est plus faible. Avec sa seule puissance musculaire, qui est de 10 kilogrammètres environ par seconde, l'homme pourra donc toujours s'élever dans l'air au moyen de l'hélice ; il lui suffira, pour cela faire, de réduire convenablement le *pas* de cette dernière. Quant à la propulsion, on comprend aisément qu'il suffit du plus faible effort pour pousser le corps en avant.

Il est bien entendu, d'ailleurs, que tous les mouvements sont à billes et que toute la construction doit être particulièrement soignée.

Les principes qui précèdent sont, évidemment, susceptibles d'extension et s'appliquent dans le cas de grands appareils marchant avec une puissante machine à vapeur ; mais les dispositions sont, alors, nécessairement un peu différentes.

Paris. — Imp. Wattier et Cᵉ, 4, rue des Déchargeurs.






LIBRARY OF CONGRESS
0 013 528 253 4